Atelier disciplinaire AD2

Un espace de mesure

Olivier Bonneton, Campus Sciences-U Lyon

Peggy Thillet, Education Nationale

Nathalie Caparozz, Education Nationale

Christelle Soubrier, Education Nationale

Cahier d'activités

- Extrait du programme de mathématiques du cycle 4

- Introduction

- Estimer rapidement le diamètre de la Lune (valeur relative).

- Les observations d’Aristarque de Samos.

  Observation 1 : Calculer le diamètre de la Lune (valeur relative).

  Observation 2 : Calculer la distance Terre-Lune (valeur relative).

  Observation 3 : Calculer la distance Terre-Soleil (valeur relative).

- Calculer la circonférence de la Terre à la façon d’Eratosthène.

- Estimer la distance Terre-Lune à la façon de Lalande et La Caille.

- Calculer la distance des planètes internes à la façon de Copernic.

- Estimer la distance de 61 Cygni à l’aide de la méthode de la parallaxe.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre. » Nombres décimaux. » Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé. » Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales. » Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144. » Les préfixes de nano à giga.	Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes). Relier fractions, proportions et pourcentages. Associer à des objets des ordres de grandeurs (par exemple, la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la longueur de l'intestin, la capacité de stockage d'un disque dur, la vitesse du son et de la lumière, la population française et mondiale, la distance de la Terre à la Lune et au Soleil, la distance du Soleil à l'étoile la plus proche). Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure. Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.	Construire des frises, des pavages, des rosaces. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.
Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. » Position relative de deux droites dans le plan. » Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. » Médiatrice d'un segment. » Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). » Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. » Théorème de Thalès et réciproque. » Théorème de Pythagore et réciproque.	Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

INTRODUCTION

Les premières mesures de distance entre notre environnement, la Terre, et ce que nous pouvons observer le soir, les astres, ont été réalisées en Grèce aux alentours **du IV^{e} siècle av. J-C.** Cela peut paraitre tardif dans l'histoire de l'humanité mais c'est principalement la conséquence de plusieurs **manques** :

- Un modèle descriptif des mouvements observés
- Un développement suffisant des mathématiques
- Des instruments de mesure pour déterminer un temps ou des angles…

Si les hommes ont toujours levé les yeux au ciel pour l'observer la nuit, ils n'ont vraiment commencé à chercher des modèles que lorsqu'il a fallu établir des calendriers pour **rythmer la vie commune** (agriculture, événements religieux…). Les mesures réalisées n'étaient alors que temporelles : détermination/mise en place des mois, années, lunaisons…

Vers la fin du V^{e} siècle av. J-C, il semble que ce soit Philolaos de Crotone qui ait été l'un des premiers à envisager que **la Terre soit courbe** pour expliquer notamment l'observation selon laquelle on voit la coque des navires disparaitre avant les voiles à l'horizon. Dans son système, la Terre est mobile autour d'un feu central autour duquel tournent tous les astres.

Les étoiles, fixes, étaient naturellement placées sur une sphère fixe lointaine et les astres mouvants, Soleil, Lune, étoiles mobiles (planètes), sur des sphères internes à celle-ci. On commence aussi, à cette époque, à **mesurer les positions des astres** à l'aide d'alidades, sortes de rapporteurs rudimentaires.

Il faut ensuite attendre le début du IV^{e} siècle av. J-C pour qu'Eudoxe replace la Terre au centre de ces sphères imbriquées sûrement pour mieux correspondre à l'observation quotidienne du mouvement du Soleil. Au milieu du IV^{e} siècle av. J-C, Aristote démontre que la Terre est sphérique à partir de l'observation de **l'ombre portée de la Terre sur la Lune** mais maintient sa position **au centre du système**. Il évaluera la circonférence de la Terre à environ 440 000 stades, soit plus du double de la valeur réelle.

ESTIMER RAPIDEMENT LE DIAMETRE DE LA LUNE

CLASSES : • Cycle 4

PRE REQUIS :
- Médiatrice d'un segment
- Centre du cercle circonscrit à un triangle
- Construction de figures simples à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

En observant la photo d'une éclipse de Lune, et en considérant l'ombre de la Terre comme cylindrique jusqu'à l'orbite de la Lune, il est possible d'obtenir une estimation du rapport entre les rayons terrestres et lunaires.

1) A l'aide du fichier *EclipseLune.ggb*, estimer le rapport entre les rayons terrestres et lunaires.

R_{Lune} (photo) : ------------- R_{Terre} (photo) : ------------- R_{Terre} / R_{Lune} (photo) = -------------

2) Commenter ce résultat sachant que l'ombre de la Terre est, en réalité, conique.

R_{Lune} (réel) : ------------- R_{Terre} (réel) : ------------- R_{Terre} / R_{Lune} (réel) = -------------

LES OBSERVATIONS D'ARISTARQUE DE SAMOS

OBSERVATION 1 : CALCULER LE DIAMETRE DE LA LUNE

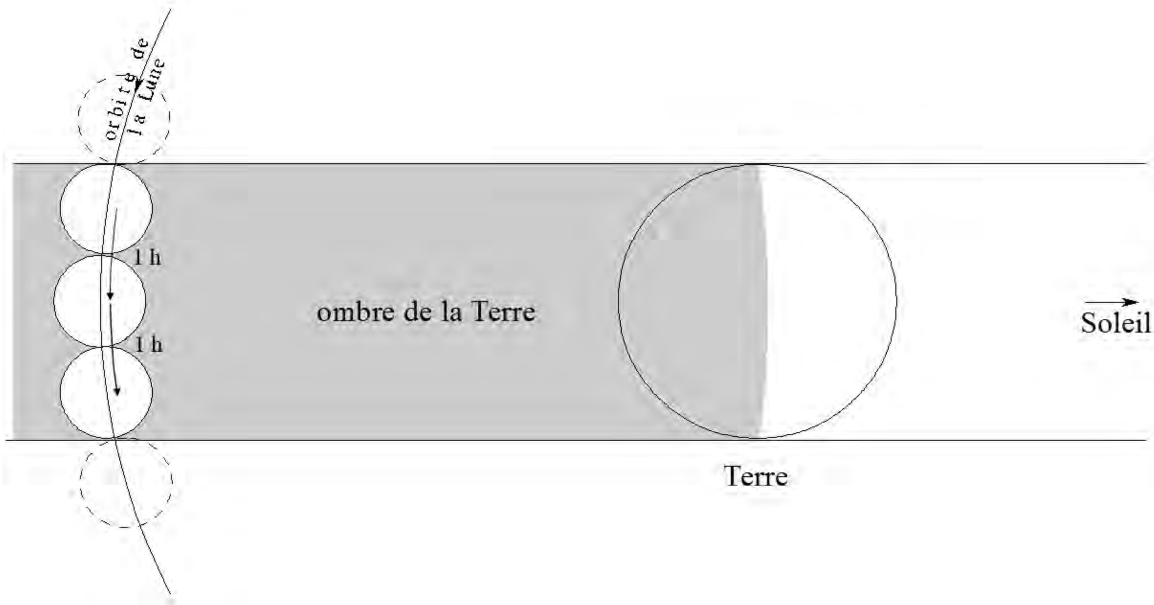
CLASSES : • Cycle 3

PRE REQUIS : • Aucun

CONTEXTE :

Aristarque de Samos (320-250 av. J-C) a été le premier à avoir formulé l'hypothèse d'un système héliocentrique et a réalisé les premières mesures. A cette époque, le diamètre de la Terre n'est pas encore connu. C'est pourquoi les différentes mesurent seront exprimées en fonction du diamètre terrestre.

- Il avait observé que la Lune bouge par rapport aux étoiles considérées fixes et qu'elle se déplace chaque heure d'une distance équivalente à son diamètre apparent
- Il avait également remarqué, durant les éclipses de Lune que le temps durant lequel celle-ci reste entièrement dans ce qu'il croit être un cylindre d'ombre était d'au maximum deux heures.



Il en a déduit que le diamètre de ce cylindre d'ombre est trois fois plus grand que celui de la Lune, $D_{Terre} = 3\ D_{Lune}$, ce qui n'est pas très loin de la mesure actuelle : $D_{Terre} = 3{,}7\ D_{Lune}$

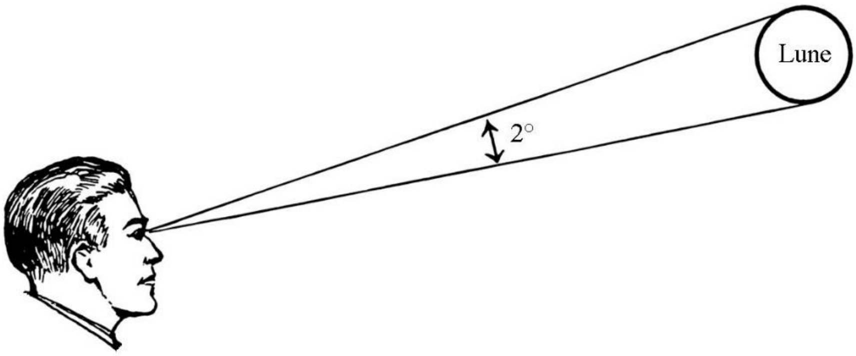
OBSERVATION 2 : CALCULER LA DISTANCE TERRE-LUNE

CLASSES : • Fin de Cycle 4

PRE REQUIS : • Calculs de longueurs dans un triangle rectangle à l'aide de la trigonométrie.

CONTEXTE :

Après avoir déterminé $D_{Terre} = 3\ D_{Lune}$, Aristarque a estimé le diamètre apparent de la Lune à 2°.



1) A l'aide de cette mesure, exprimer la distance Terre-Lune en fonction du diamètre de la Terre.

Aristarque de Samos a surestimé le diamètre apparent de la Lune. Il est en réalité de 0,5°.

2) A l'aide de cette nouvelle mesure, exprimer à nouveau la distance Terre-Lune en fonction du diamètre de la Terre.

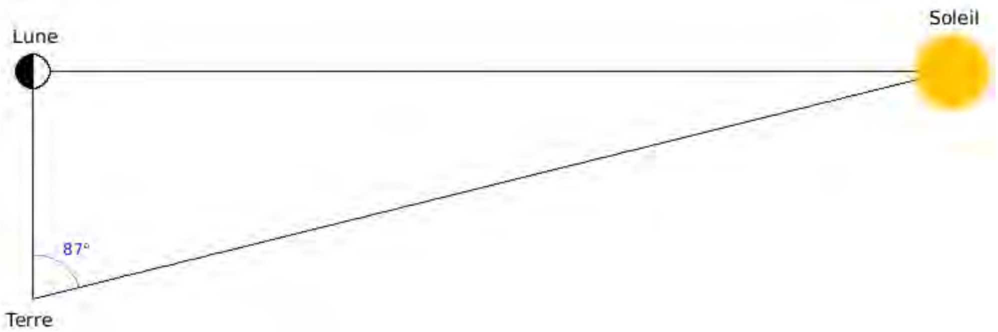
Observation 3 : Calculer la distance Terre-Soleil

Classes : • Fin de Cycle 4

Pre requis : • Calculs de longueurs dans un triangle rectangle à l'aide de la trigonométrie

Contexte :

Sachant que lorsque la Lune est en « quartier », elle occupe le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle Terre-Lune-Soleil, Aristarque a mesuré, depuis la Terre, l'angle entre la direction du Soleil et celle de la Lune. Il a trouvé 87°.



1) A partir de cette mesure, exprimer la distance Terre-Soleil, en fonction de la distance Terre-Lune.

Avec les moyens de l'époque, il était impossible de mesurer cet angle avec une bonne précision. Il est en réalité de 89,85°.

2) A partir de cette nouvelle mesure, exprimer à nouveau la distance Terre-Soleil, en fonction de la distance Terre-Lune.

Conclusion :

Aristarque est parvenu à lier entre elles les mesures du diamètre de la Lune, du diamètre de la Terre, de la distance Terre-Lune et de la distance Terre-Soleil. A cette époque, les mesures sont encore relatives : on sait évaluer certaines longueurs mais toujours par rapport à une autre.

CALCULER LE PERIMETRE DE LA TERRE (ERATOSTHENE)

CLASSES : • Début de Cycle 4

OBJECTIFS :

• Résoudre un problème historique.

• Réinvestir des compétences mathématiques dans une situation nouvelle.

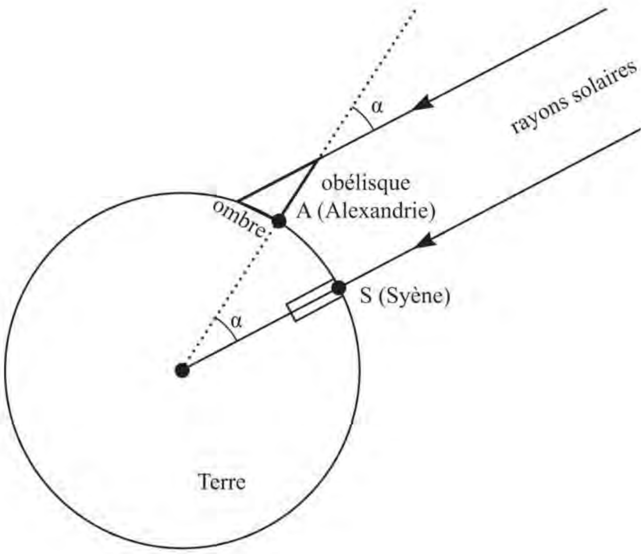
• Etudier comment les notions de géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (programme du cycle 4).

PRE REQUIS :

• Angles alternes-internes formés par deux parallèles et une sécante
• Périmètre d'un cercle
• Calcul d'une quatrième proportionnelle

CONTEXTE :

Ératosthène, un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du III^{e} siècle av. J.-C. a été le premier à proposer une méthode permettant d'obtenir une estimation du périmètre de la Terre. La connaissance de cette dimension va alors permettre de connaître de manière absolue les dimensions de la Lune, la distance Terre-Lune et la distance Terre-Soleil.



Il apprit qu'une fois par an, au midi solaire, le 21 juin, à Syène (aujourd'hui Assouan), le soleil se reflète au fond des puits. Or, le même jour, à Alexandrie, situé 5000 stades plus au nord, les obélisques ont une ombre formant avec la verticale un angle de 7°12'.

1 stade = 157,7 m

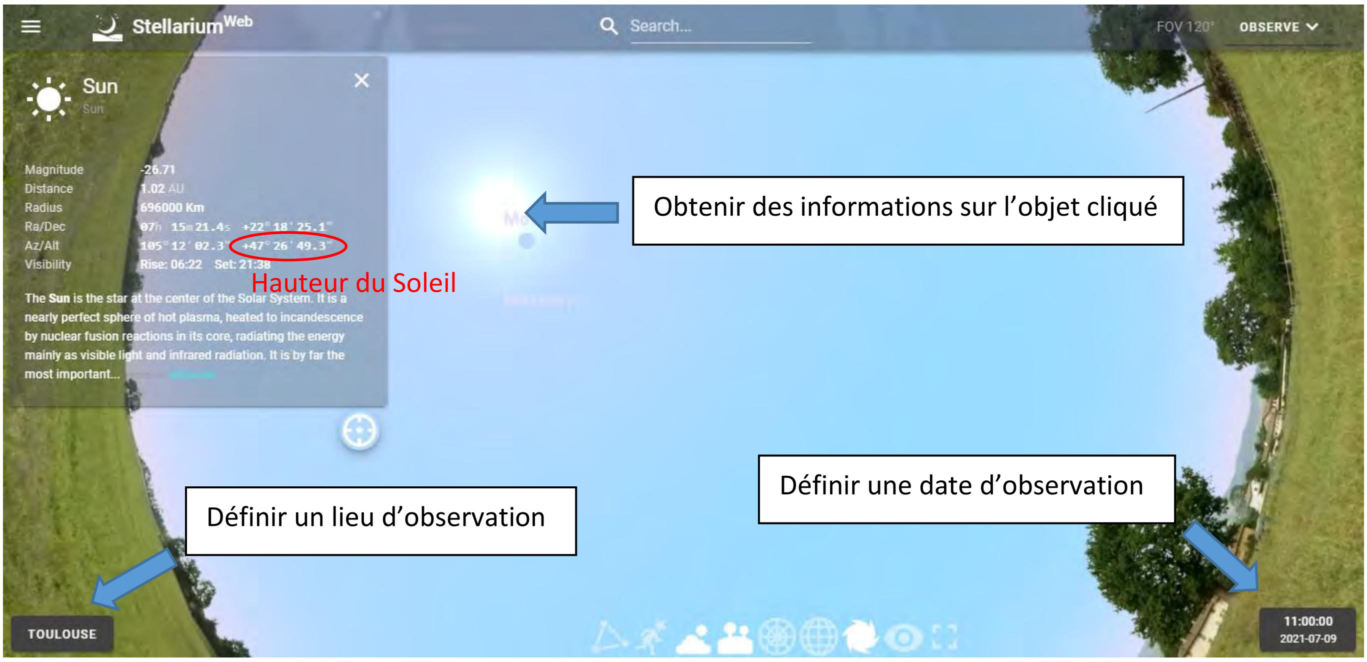
1) A partir des observations réalisées par Eratosthène, calculer la circonférence de la Terre.

A l'aide des logiciels Google Earth et Stellarium, il est possible de reproduire l'expérience réalisée par Eratosthène.

2) A l'aide de Google Earth, mesurer la distance entre Alexandrie et Syène (aujourd'hui Assouan).

---

3) A l'aide de Stellarium, vérifier que les 21 juin, à Syène (Assouan), le Soleil passe bien au zénith.



4) A la même heure, relever sa hauteur à Alexandrie (Alexandria).

---

5) Recalculer la circonférence de la Terre et commenter le résultat.

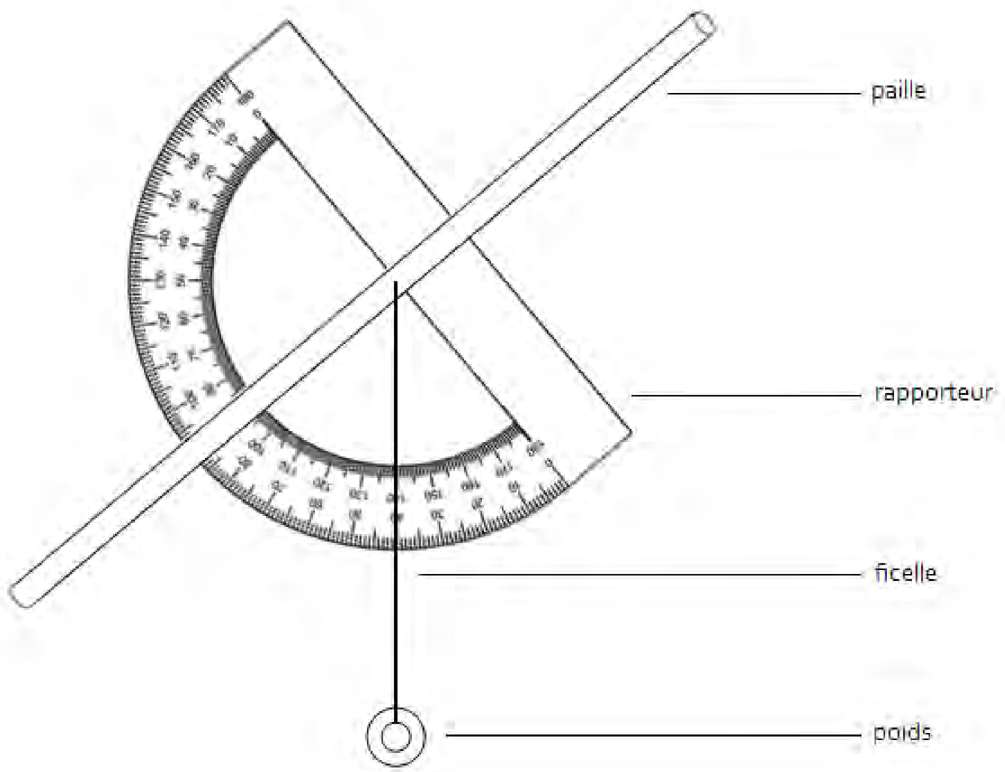
Remarque :

Nul n'est besoin de se trouver à Alexandrie ou Assouan pour mesurer la circonférence de la Terre. Choisir deux villes assez lointaines sur le même méridien, et s'il y a du soleil dans les deux villes (au midi solaire), vous pourrez, vous aussi, tenter l'expérience avec un ami.

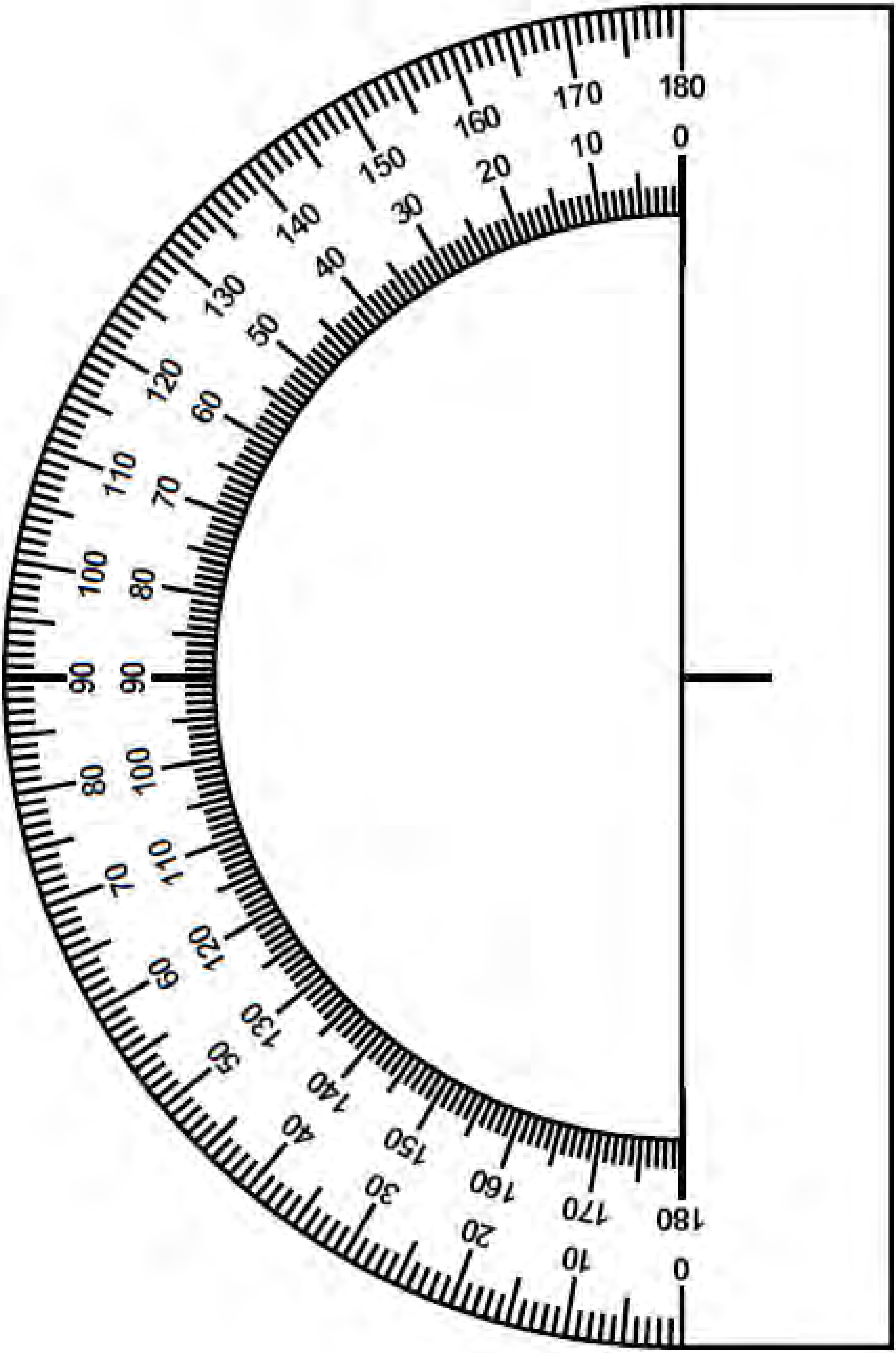
Nous pouvons choisir pour cette expérience par exemple les villes de Toulouse et Paris ou les villes de Bordeaux et Caen. Grâce à un sextant très rudimentaire, nous pouvons mesurer la hauteur du Soleil à Toulouse (ou Bordeaux) et celle à Paris (ou Caen) et, à la manière d'Eratosthène, calculer la circonférence de la Terre.

CONSTRUCTION DU SEXTANT

Matériel nécessaire :
- une paille
- un rapporteur papier (modèle joint en fin de dossier)
- une ficelle
- un poids (rondelle de métal, plomb de pêche, …)
- du ruban adhésif



Expliquer à l'aide d'un schéma, comment cet instrument peut-il mesurer la hauteur du soleil.



CALCULER LA DISTANCE TERRE-LUNE (LALANDE ET LA CAILLE)

CLASSES : • Début de Cycle 4 ou Lycée

PRE REQUIS : • Modélisation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (Début de Cycle 4)
• Formule des sinus (pour le lycée)

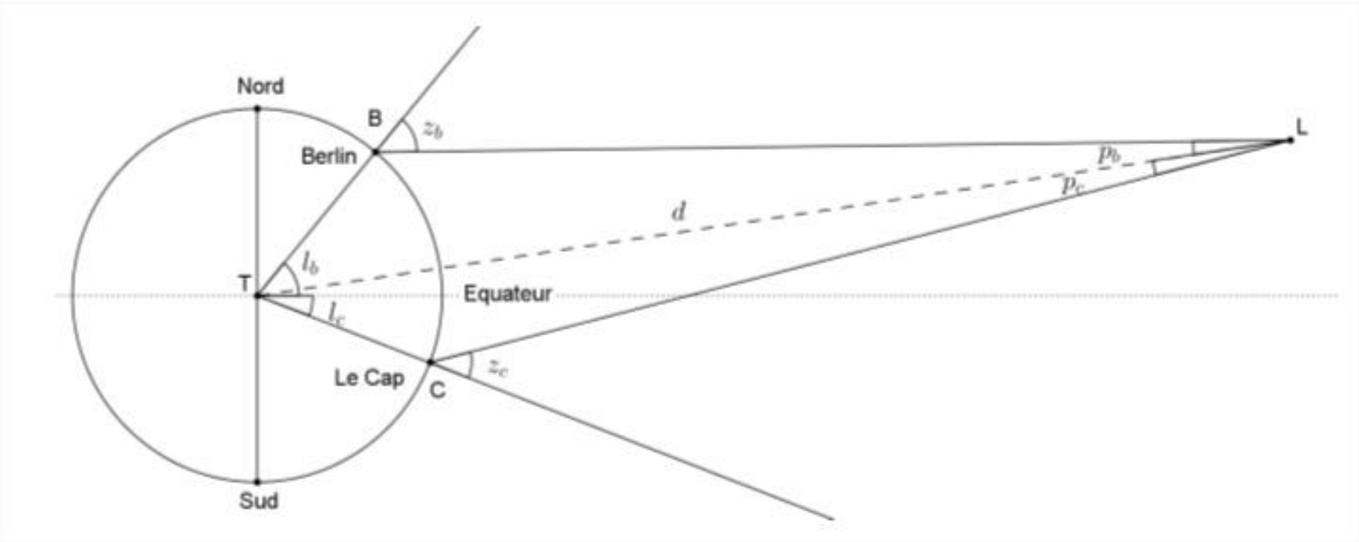
CONTEXTE :

En 1751, deux astronomes français, Jérôme Lalande et Nicolas-Louis La Caille ont été envoyés respectivement à Berlin (B) et au Cap de Bonne-Espérance (C) pour calculer la distance Terre Lune par triangulation. Précisons que ces deux villes ont été choisies car elles ont des longitudes proches.
A l'aide d'un sextant, ils ont mesuré deux hauteurs zénithales, l'une à Berlin Z_b et l'autre au Cap Z_c.
Connaissant la latitude de Berlin l_b et celle du Cap l_c, ils ont alors calculé les parallaxes de hauteur de la Lune depuis Berlin p_b et depuis Le Cap p_c ce qui leur a permis de déterminer la distance Terre-Lune d.

Jérôme Lalande

Nicolas-Louis La Caille

Sextant



QU'EST-CE QUE LA PARALLAXE D'UN ASTRE ?

La parallaxe horizontale d'un astre A depuis un point B (figure 1)
Soit un point B de la Terre , T le centre de la Terre et un astre A que l'on voit à l'horizon.
Le triangle TAB est alors rectangle en B.
On appelle parallaxe l'angle α .

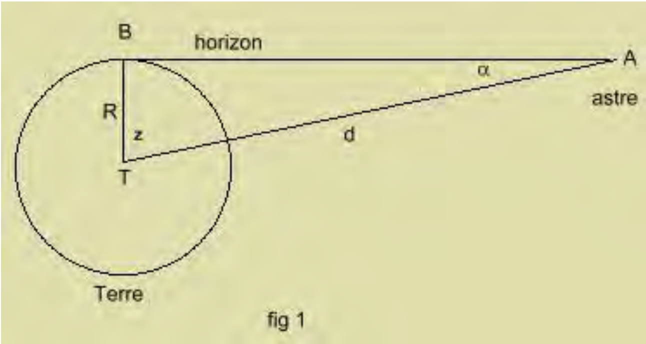


fig 1

La parallaxe de hauteur d'un astre A depuis un point B (figure 2)
Si l'astre n'est pas sur l'horizon, mais est vu avec une hauteur zénithale z'.
On appelle parallaxe de hauteur l'angle p.

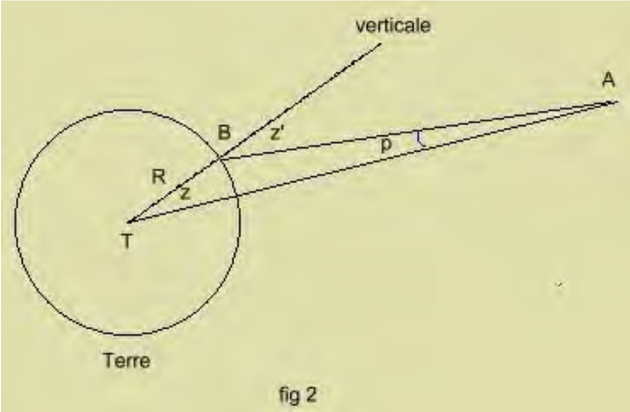


fig 2

La parallaxe est un angle que l'on ne peut pas mesurer directement, c'est un intermédiaire de calcul.

© CLEA

Voici les mesures effectuées par Lalande et La Caille :

Berlin	Cap de Bonne-Espérance
Latitude : l_B = *52° 31' 13" N = 52,52° N* Hauteur zénithale : Z_b = *53° 31' 12'' = 53,52°*	Latitude : l_c = *33° 55' 12" S = 33,92 ° S* Hauteur zénithale : Z_c = *34° 39' 36'' = 34,66°*

1) A l'aide de l'outil GeoGebra, et sachant que R_{Terre} = 6 378 km , modéliser la situation et estimer la distance TL.

2) Avec des outils de lycée (formule des sinus) :

a) Exprimer p en fonction de :
Z_1, Z_2, λ_1 et λ_2.

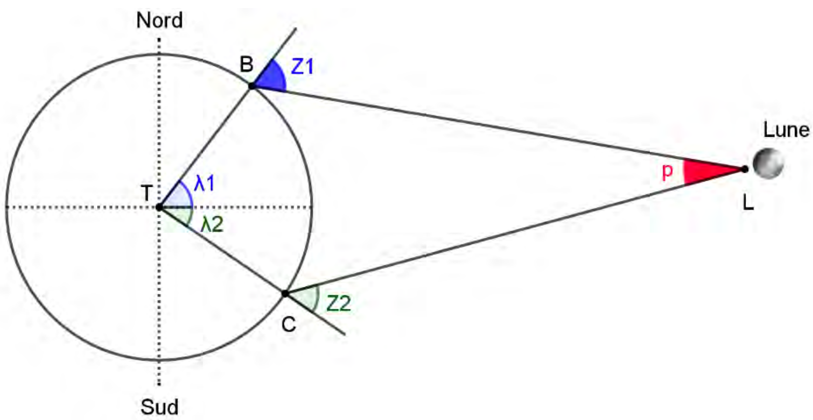
b) En appliquant la formule des sinus dans les triangles BTL et CTL, montrer que :

$$\sin p_1 + \sin p_2 = \frac{R}{TL}(\sin Z_1 + \sin Z_2)$$

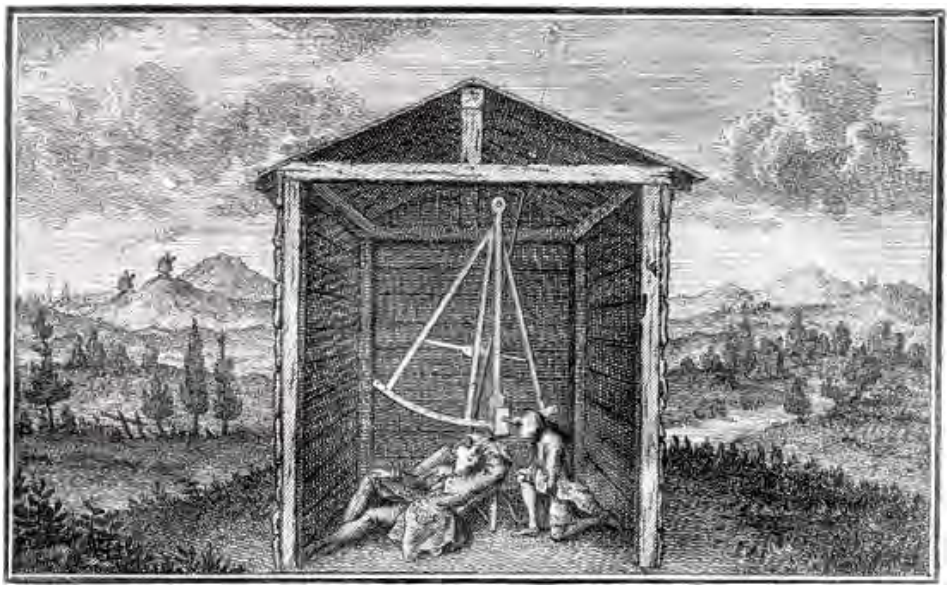
(avec $p_1 = \widehat{BLT}$ et $p_2 = \widehat{CLT}$)

c) En assimilant p_1 et p_2 , exprimés en radians, à leur sinus, montrer que :

$$TL = \frac{R}{p}(\sin Z_1 + \sin Z_2)$$



d) Calculer TL à l'aide des mesures effectuées par Lalande et La Caille.



CALCULER LA DISTANCE DES PLANETES INTERNES (COPERNIC)

CLASSES : • Seconde

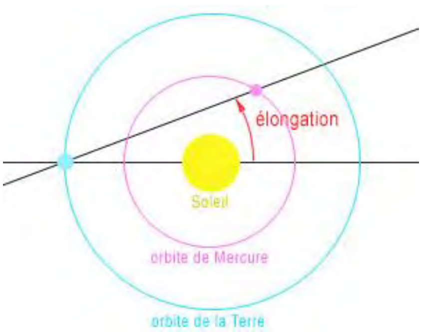
PRE REQUIS : • Calculs de longueurs dans un triangle rectangle à l'aide de la trigonométrie.
• Propriétés de la droite tangente à un cercle

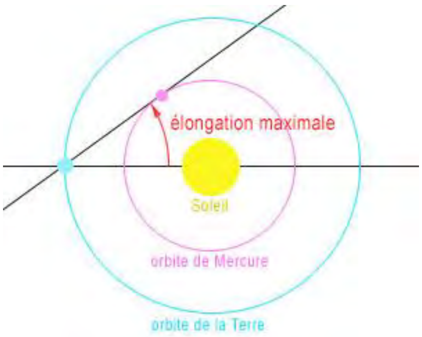
CONTEXTE :

La détermination de la distance des planètes internes était impossible tant que subsistait le modèle de Ptolémée et ce n'est qu'avec le retour du modèle héliocentrique (Copernic) que cela a été envisagé.

Toutefois, l'évaluation de la distance Terre-Soleil par Aristarque de Samos, bien que reconnue comme imprécise, faisait toujours référence, en l'absence de technique plus efficace pour la déterminer. C'est pourquoi, l'unité astronomique (1UA = distance Terre-Soleil) s'est imposée et c'est donc en rapport à cette distance que Copernic chercha à évaluer les distances des planètes internes

Pour cela, il s'est intéressé à l'angle Soleil-Terre-Planète, appelé élongation de la planète et qu'il est facile de mesurer. Celui-ci, varie au cours du temps et atteint son maximum lorsque la droite (Terre-Planète) est tangente à l'orbite de la planète.





Les plus grandes élongations que Copernic a pu mesurer valent 24° pour Mercure et 44° pour Vénus.

1) A l'aide des mesures de Copernic, exprimer les distances Soleil-Mercure et Soleil-Vénus en UA.

2/ A l'aide de Stellarium et en utilisant le plug-in 'mesure de l'angle', déterminez les élongations maximales pour Mercure et Vénus sur **l'année 2021**. Recalculer ensuite les distances Soleil-Mercure et Soleil-Vénus en tenant compte de ces nouvelles mesures.

ESTIMER LA DISTANCE DE 61 CYGNI PAR LA METHODE DE LA PARALLAXE (BESSEL)

CLASSES : • Seconde

PRE REQUIS : • Vocabulaire sur les fonctions
• Représenter graphiquement une fonction

Fonctions de référence		
Fonctions linéaires et fonctions affines	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax+b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax+b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.
Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.

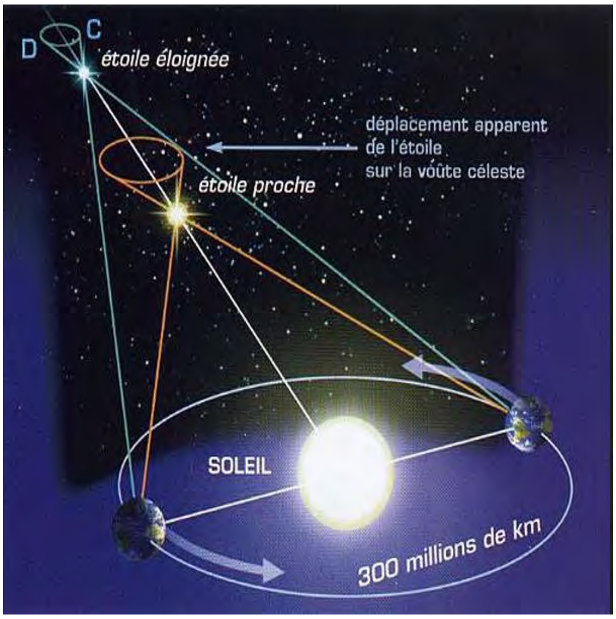
CONTEXTE :

Avec Aristote, nous avons le modèle géocentrique classique qui va dominer pendant plus de 1500 ans. La Terre se trouve au centre de l'univers, les luminaires (Soleil et Lune) ainsi que les planètes (au nombre de cinq : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne) tournent autour de la Terre. Le monde est divisé en deux zones : le monde sublunaire et le monde supralunaire. Quant aux étoiles, elles tournent autour de la Terre sur une sphère au-delà des planètes, qu'on appelle la sphère des fixes. Toutes les étoiles se trouvent à la même distance de la Terre.

Il faudra dans un premier temps attendre l'émergence de l'héliocentrisme avec Nicolas Copernic pour modifier la perception du monde et en particulier le travail de Thomas Digges en 1576 pour faire éclater cette sphère des fixes et étendre les étoiles jusqu'à l'infini.

Le problème réside à partir de cet instant de déterminer la distance des étoiles les plus proches de la Terre, car on pressent qu'elles doivent se trouver néanmoins très éloignées de nous.

La première méthode historique se base sur la triangulation. Mais il faut modifier la base de mesure. Le calcul ne se fera plus à partir de deux lieux distants sur Terre, mais de deux observations distantes de six mois d'intervalles. Ainsi, la distance qui sépare ces deux observations est égale aux deux positions les plus extrêmes de la Terre sur son orbite.



La difficulté principale est la petitesse de l'angle mesuré. Pour s'en convaincre, il suffit de savoir que ces angles sont de l'ordre de la seconde d'arc.

1° d'angle, c'est deux fois le diamètre de la pleine Lune, c'est aussi un rond de 3.5 m situé à 200 m.

1' d'angle, c'est 1/60e d'un degré, soit 1/30e de la pleine Lune (soit 100 km sur la Lune). C'est un disque de 6 centimètres situé à 200 mètres.

1'' d'angle, c'est 1/60e d'une minute d'arc, soit 1/1800e de la pleine Lune (soit 1,5 km sur la Lune). C'est aussi 1 millimètre situé à 200 mètres.

La première étoile dont la parallaxe a été mesurée est 61 Cygni, par Friedrich Bessel vers 1758.

1) A l'aide du document précédent, répondez aux questions suivantes :

a/ Définissez la sphère des fixes.

---

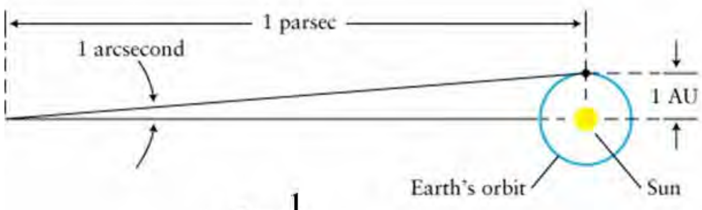
b/ Quel est l'apport de Thomas Digges au modèle héliocentrique ?

---

c/ Expliquez le mouvement apparent d'une étoile sur la voûte céleste ?

---

2) Voici la définition mathématique de la parallaxe à partir de la fonction inverse :



$$d = \frac{1}{p}$$

d est en **parsecs** si p est **en secondes d'arc**.
1 parsec = 3,26 années-lumière

a/ En sachant que Bessel avait trouvé en 1758 un angle de 0,31 '', déterminer la distance en parsecs et en années-lumière de 61 Cygni.

b/ Une mesure récente de la parallaxe de 61 Cygni B donne 0,28588 ''. Déterminer sa distance et l'erreur relative qu'a réalisée Bessel.

3) À partir de la méthode de la parallaxe, au fil des ans, la connaissance de la distance des étoiles les plus proches de la Terre va amener à une nouvelle façon de voir et d'appréhender l'espace. Voici un tableau indiquant le nombre d'étoiles dont la distance a été mesurée par la technique de la parallaxe en fonction des années.

Année	1839	1850	1862	1888	1901	1906	1924	1949	1962
Nombre de parallaxes	3	6	10	25	38	263	1670	5751	6607

a/ Tracer un graphique représentant les données de ce tableau. Vous placerez en abscisses les années et en ordonnées le nombre d'étoiles dont on a mesuré la parallaxe.

b/ La croissance n'est pas linéaire comme vous pouvez le constater. Expliquer le bond entre 1906 et 1924.

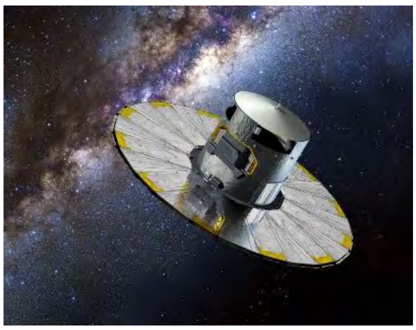
4) Vers 1980, on arrive à un seuil où la distance de 10 000 étoiles est connue dans une sphère de 650 années-lumière. Pour augmenter alors notre connaissance des distances des étoiles, il faut franchir une limite observationnelle liée à la Terre et c'est la raison des deux missions HIPPARCOS et GAIA.

– La mission HIPPARCOS pour HIgh Precision PARallax COllecting Satellite. Mission réalisée entre 1989 et 1993. Les résultats ont été publiés en 1997.

European Space Agency
Agence spatiale européenne

– La mission GAIA prend la suite de la mission HIPPARCOS. La mission est en cours. Elle a été lancée en 2013 et les données ont été collectées jusqu'en 2018 (environ 100 To de données). Les résultats sont en cours de publication. Le bilan attendu : 1 milliard d'étoiles seront cataloguées avec une précision de l'ordre de 0,000 010" d'arc. (10 microsecondes d'arc, soit une pièce de 2 centimes sur la Lune vue depuis la Terre)

Le 3 décembre 2020, l'ESA (l'Agence Spatiale Européenne) a publié sa troisième version réalisée par le satellite GAIA. Les objectifs ont été largement dépassés : 1.8 milliards d'étoiles cataloguées !!!



Sources : http://wwwhip.obspm.fr/hipparcos/

http://www.cosmos.esa.int/web/hipparcos/the-mission

http://gaia.obspm.fr/

https://gaia-mission.cnes.fr/